4. Funcións de?nidas implicitamente

1. Comproba que a ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$ de?ne a z como función implícita de (x, y) nun entorno do punto $(6, -3, -2)$. Calcula as derivadas parciais de primeira e segunda orde da función implícita no punto $(6, -3)$. Fai o mesmo para a ecuación $xye^z + z\cos(x^2 + y^2) = 0$ nun entorno do punto $(0, 0, 0)$.

2. Comproba que o sistema de ecuacións $x^2 + y - z^2 - w^2 = 0$, $x^2 - y - z^2 - w = 0$ de?ne a (z, w) como funcións implícitas de (x, y) nun entorno do punto $(x_o, y_o, z_o, w_o) = (2, 1, 1, 2)$. Calcula as derivadas parciais $D_x z$, $D_y z$, $D_x w$, $D_y w$. Calcula tamén as derivadas parciais de segunda orde da función implícita.

3. Comproba que o sistema de ecuacións $uy + vx + w + x^2 = 0$, $uvw + x + y + 1 = 0$, de?ne a (x, y) como función de (u, v, w) nun entorno do punto $(x_o, y_o, u_o, v_o, w_o) = (-1, 0, 2, 1, 0)$. Calcula as derivadas parciais da función implícita.

4. Consideremos a ecuación funcional $xy^2 + x^2 + \ln(yz) = 2$.

   a) Estuda se nun entorno do punto $(1, -1, -1)$, a variable x é función implícita de (y, z), $x = \varphi(y, z)$.

   b) En caso a?rmativo, calcula $D\varphi(-1, -1)$ e $D\varphi(y, z)$ nos puntos do dominio de φ.

   c) Calcula, se é posible, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}(-1, -1)$.

   d) Sexa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, tal que $Df(1, 1) = \left(\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3}\right)$, e consideremos a función, $H(y, z) = (xy, f(x, z))$, sendo x a función implícita de?nida no apartado a). Calcula $DH(-1, -1)$.

5. Comproba que a ecuación funcional $\frac{xy}{z} - \cos\left(\frac{y^2\pi}{z}\right) = 0$ de?ne a z como función implícita das variables (x, y), $z = \varphi(x, y)$, nun entorno do punto $(x_o, y_o, z_o) = (0, 1, 2)$.

   a) Calcula $D\varphi(0, 1)$ e $D\varphi(x, y)$, para todo (x, y).

   b) Comproba, utilizando a igualdade de Euler, que a función implícita é homoxénea de grado 2.

6. Deriva as seguintes ecuacións sabendo que y é función implícita da variable x.

   i) $x^2 - 3xy + y^2 - 2x + y - 5 = 0$ ii) $\operatorname{sen} x + \frac{1}{\cos(xy)} - 3 = 0$

   iii) $\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + xy = 4$ iv) $\frac{x}{x^2 + y^2} - y^2 = 6$

7. Deriva as seguintes ecuacións sabendo que z é función implícita das outras variables que aparecen na ecuación.

   i) $\operatorname{tg}(x + y) + \operatorname{tg}(y + z) = 1$ ii) $z = e^x \operatorname{sen}(y + z)$

   iii) $x \ln y + y^2 z + z^2 = 8$ iv) $\cos(xy) + \operatorname{sen}(yw) + zw = 20$

8. Calcula a taxa marxinal de substitución e a elasticidade de substitución entre K e L para a función de produción de Coob-Douglas $Q(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, a función CES (Constant Elasticity Substitution) $F(K, L) = A(aK^{-\rho} + bL^{-\rho})^{-\frac{m}{\rho}}$, $A, a, b > 0$, $\rho > -1$, $\rho \neq 0$, e a función $G(K, L) = K^\alpha + L^\alpha$, $\alpha \notin \{0, 1\}$.