Grado en Enxeñería Informática
Fundamentos matemáticos para a informática
Curso 2009-10

Introducción á lóxica matemática

(1) Sexan p: El é rico e q: El é feliz. Expresar por enunciados verbais os seguintes enunciados simbólicos: $p \vee q$, $p \wedge q$, $q \to p$, $p \vee \neg q$, $q \leftrightarrow \neg p$, $\neg p \to q$, $\neg\neg p$, $(\neg p \wedge q) \to p$

(2) Sendo p e q as proposicións do exercicio anterior, escribir en forma simbólica os seguintes enunciados:
- El non é rico nin feliz.
- Ser pobre é ser infeliz.
- Un nunca é feliz se é rico.
- El é pobre pero feliz.
- El non pode ser rico e feliz.
- Se el é infeliz é pobre.
- Se el non é pobre e feliz, entonces é rico.
- Ser rico é o mesmo que ser feliz.
- El é pobre ou ben é rico e feliz.
- Se el é pobre, el é feliz.
- Ser pobre implica ser feliz.
- Hai que ser pobre para ser feliz.
- Ser rico é suficiente para ser feliz.
- Ser rico é necesario para ser feliz.
- El é pobre só se é infeliz.

(3) Determina-lo valor de verdade dos seguintes enunciados:
- Se $5 < 3$, entonces $-3 < -5$.
- Non é verdade que $2 + 2 = 4$ ou $3 + 5 = 6$.
- $2 + 2 \neq 4$ e $3 + 3 = 6$.
- Se $3 < 5$, entonces $-3 < -5$.
- Non é verdade que se $2+2 = 4$ entonces $3+3 = 6$ ou $1+1 = 2$.
- Se $2+2 = 4$, entonces non é verdade que $2+1 = 3$ e $5+5 = 10$.
- Non é verdade que $2 + 7 = 9$ se, e soamente se, $2 + 1 = 5$ implica $5 + 5 = 8$.
- Se $2 + 2 \neq 4$, entonces non é verdade que $3 + 3 = 7$ se, e soamente se, $1 + 1 = 2$.
- Cervantes escribiu o Quijote e se $2+3 \neq 5$, entonces matemáticas é unha ciencia.

(4) Escríbase a negación de cada un dos enunciados seguintes da maneira máis simple posible:
- El é alto pero galán.
- El non é rico nin feliz.

- Se caen os precios das accións, aumenta o desemprego.
- Nin Marcos nin Enrique son ricos.
- El ten cabelo loiro ou ollos azuis.
- El ten cabelo loiro se, e soamente se, ten ollos azuis.
- Marcos e Enrique son intelixentes.
- Marcos ou Enrique é intelixente e Aura é guapa.

(5) Confecciona-la táboa de verdade de cada unha das seguintes proposicións: $\neg p \wedge \neg q$, $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$, $p \rightarrow (\neg p \vee q)$, $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q)$

(6) Demostrar : $p \rightarrow \neg q \equiv q \rightarrow \neg p$, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$, $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \not\equiv [(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q]$, $[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q]$

(7) ¿É correcto escribir $p \wedge q \vee r$?

(8) Demostrar que $p \rightarrow (p \vee q)$ é unha tautoloxía e que $p \wedge (\neg p \wedge q)$ é unha falacia.

(9) Sexan p e q proposicións para as cales $p \rightarrow q$ é falsa. Determina-los valores de verdade de: $p \wedge q$, $\neg p \vee q$, $q \rightarrow p$, $\neg q \rightarrow \neg p$

(10) Nega-la proposición: Se Pepe vai ó cine, entonces María chora.

(11) Demostrar que $(p \wedge q) \rightarrow$ r e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ son loxicamente equivalentes.

(12) Simplifica-la proposición: $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$. (Resultado:$p$)

(13) Simplifica-la proposición: $\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q]$. (Resultado: $q \wedge r$)

(14) Estudia-la validez dos seguintes argumentos:

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \qquad \frac{p \vee q}{\therefore p} \qquad \frac{q}{\therefore p \rightarrow q}$$

$$\frac{p \leftrightarrow q}{\therefore q \rightarrow p} \qquad \frac{\neg p}{\therefore p \rightarrow q} \qquad \frac{q}{\therefore (p \wedge q) \leftrightarrow p}$$

(15) Estudia-la validez dos seguintes argumentos:

- Rita está facendo un pastel. Se Rita está facendo un pastel, entonces non está tocando a flauta. Se Rita non está tocando a flauta, entonces seu pai non pagará o seguro. Polo tanto, seu pai non pagará o seguro.
- Se Concha é elexida presidenta do club, entonces faise socia. Concha non se fixo socia. Polo tanto, Concha non foi elexida presidenta.
- Se $2 + 3 = 6$, entonces $2 + 4 = 6$. $2 + 3 \neq 6$. Polo tanto, $2 + 4 \neq 6$.
- A carteira de Manolo está no bolsillo ou na mesa. A carteira de Manolo non está no bolsillo. Polo tanto a carteira de Manolo está na mesa.
- Una condición suficiente para que Pepe gañe o torneo de golf é que Manolo non faga birdie no último burato. Pepe gañou o torneo de golf. Polo tanto Manolo no fixo birdie no último burato.

(16) Estudia-la validez do seguinte argumento:

$$\begin{array}{c} p \to r \\ \neg p \to q \\ q \to s \\ \hline \therefore \neg r \to s \end{array}$$

(17) Determina-lo valor de verdade dos seguintes enunciados. (O conxunto universal é o dos números reais).

- $\forall x \quad x^4 = x$
- $\forall x \quad x - 8 < x$
- $\exists x / 2x = x$
- $\exists x / x^2 - 2x + 5 = 0$
- $\exists x / x^2 + 3x - 2 = 0$
- $\forall x \quad 2x + 3x = 5x$

(18) Nega-los enunciados do exercicio anterior.

(19) Sexa $\{1, 2, 3, 4\}$ o conxunto universal. Determina-lo valor de verdade de cada enunciado.

- $\forall x \quad x + 3 < 6$
- $\exists x / x + 3 < 6$
- $\forall x \quad x^2 - 10 \leq 8$
- $\exists x / 2x^2 + x = 15$

(20) Nega-los enunciados do exercicio anterior.

(21) Nega-los enunciados: $\forall x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$, $\exists y\, p(y) \to \forall z\, \neg q(z)$, $\exists x\, \neg p(x) \vee \forall x\, q(x)$

(22) Nega-los seguintes enunciados:

- Se o mestre está ausente, algúns estudiantes non rematan o traballo.
- Tódolos estudiantes traballan e o mestre está presente.
- Algúns estudiantes non traballan ou o mestre está ausente.

(23) Dar un contraexemplo para cada enunciado falso. Aquí $\{3, 5, 7, 9\}$ é o conxunto universal.

$\forall x,\ x + 3 \geq 7 \qquad \forall x,\ x$ é impar $\qquad \forall x,\ x$ é primo

(24) Nega-los enunciados do exercicio anterior.

(25) Sexa $\{1, 2, 3\}$ o conxunto universal. Determina-lo valor de verdade de cada enunciado:

- $\forall x\, \forall y,\ x^2 + 2y < 10$
- $\forall x\, \exists y, x^2 + 2y < 10$
- $\exists x\, \forall y, x^2 + 2y < 10$
- $\exists x\, \exists y, x^2 + 2y < 10$

(26) Nega-los enunciados do exercicio anterior.

(27) Demostrar por inducción:

- $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$
- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$, $n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$, $n \in \mathbb{N}$